佐藤のゲームの一般化 (組合せ論的表現論とその応用)

茅田, 智幸

数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 24-33

佐藤のゲームの一般化
Generalizations of Sato-Welter game

茅田 智幸 (Tomoyuki KAYADA)
白陵高校, 関西学院大学理工学部
Hakuryo High School, Kwanseigakuin University

1 Games and Values

1.1 game

集合 $A(\neq\emptyset)$ からその部分集合全体 2^{A} への関数 $\varphi_{A}:A\rightarrow 2^{A}$ が条件

「 $a_{i+1}\in\varphi_{A}(a_{i})$ $(i=0,1,2,\ldots)$ をみたす A の元の無限列

$$a_{0}, a_{1}, a_{2}, \ldots$$

は存在しない. 」

をみたすとき, 対 (A, φ_{A}) は**ゲーム**であると定義する.

ゲーム (A, φ_{A}) では, A の元をゲームの局面, $\varphi_{A}(a)$ の元を局面 a から移ることのできる局面と考える. $a_{i+1}\in\varphi_{A}(a_{i})$ $(i=0,1,2,\ldots)$ をみたす列 $a_{0}, a_{1}, a_{2}, \ldots$ は, 局面 a_{0} からの局面の推移を表している.

局面 $a_{0}\in A$ が与えられたとき, 2 人のプレイヤー (先手と後手) が交互に

先手が $\varphi_{A}(a_{0})$ の元 a_{1} を選ぶ
後手が $\varphi_{A}(a_{1})$ の元 a_{2} を選ぶ
先手が $\varphi_{A}(a_{2})$ の元 a_{3} を選ぶ
....

と局面を次の局面へ進めていくとして, 「次の局面に進めることができなくなったプレイヤーの負け」と定める. すると, ゲーム (A, φ_{A}) を **2 人ゲーム**と見ることができる. ゲームの定義により列 $a_{0}, a_{1}, a_{2}, \ldots$ が無限に続くことはないため, 必ず勝敗が決まる. $\varphi_{A}(a_{n})=\emptyset$ となる局面 a_{n} を選んだプレイヤーの勝ちである.

2 人ゲームでは「先手, 後手ともに自分が勝てるように考えて局面を進めるなら, どちらのプレイヤーが勝つのか. 必勝手順は存在するのか. 」に興味がある.

1.2 Sprague-Grundy function

以下, $\mathcal{O}$ を順序数全体の集合 (正確には集合でなくクラス) とする. 順序数とその演算に関しては [1] などを参照.

ゲーム (A, φ_A) に対し, A から $\mathcal{O}$ への関数 $\mathcal{V}_A : A \to \mathcal{O}$ を

$$\mathcal{V}_A(a) = \min\{\, \mathcal{O} \setminus \{\, \mathcal{V}_A(a') \mid a' \in \varphi(a) \,\}\,\}, \quad a \in A$$

によって帰納的に定義する. $\mathcal{V}_A$ をゲーム (A, φ_A) の**グランディ関数 (Sprague-Grundy fund-tion)**, $\mathcal{V}_A(a)$ を局面 $a \in A$ の**グランディ数 (Sprague-Grundy value)** という.

(補足) ゲームの定義に条件

「任意の $a \in A$ に対し, $\varphi_A(a)$ は有限集合である. 」

をつけ加えれば任意の $a \in A$ に対して $\mathcal{V}_A(a)$ は有限の値となるため, $\mathcal{V}_A$ を 0 以上の整数全体 $\mathbb{N}_0$ への関数として考えられる. 以下, この条件の下で「順序数」を「0 以上の整数」に, 「$\mathcal{O}$」を「$\mathbb{N}_0$」に読み替えてよい.

グランディ数について, 次の定理がよく知られている.

Theorem 1.1 (R. P. Sprague, P. M. Grundy)
ゲーム (A, φ_A) の局面 a から局面を進めていくとすると, $\mathcal{V}_A(a) \neq 0$ ならば先手に, $\mathcal{V}_A(a) = 0$ ならば後手に必勝手順が存在する.

この定理によりグランディ数 $\mathcal{V}_A(a)$ を求めることが興味の中心となるが, 一般にこの値は求めにくい. 本稿で, 特別な条件をみたすゲームについては, グランディ数が既に知られている場合に帰着させて計算できることを示す.

1.3 homomorphism

まず, ゲームの準同型の概念を準備する. 2 つのゲーム (A, φ_A), (B, φ_B) に対し, 写像 $f : A \to B$ で

$$f(\varphi_A(a)) = \varphi_B(f(a)), \quad a \in A$$

をみたすものが存在するとき, (A, φ_A) と (B, φ_B) は**準同型**であると定義する. これを

$$(A, \varphi_A) \xrightarrow{f} (B, \varphi_B)$$

で表す. このとき, 任意の $a \in A$ に対し,

$$\mathcal{V}_A(a) = \mathcal{V}_B(f(a))$$

が成り立つ.

1.4 quotient, residue

次に, ゲームをより小さいゲームに分解していくことを考える. 順序数 α と 0 でない順序数 μ に対し,

$$\alpha = \mu \cdot \beta + \gamma, \quad \gamma < \alpha$$

をみたす順序数 β, γ が一意的に定まる [1]. これらを $\beta = q_\mu(\alpha)$, $\gamma = r_\mu(\alpha)$ で表す.

ゲーム (A, φ_A) と 0 でない順序数 μ に対し, 2 つの写像 $Q_\mu\varphi_A, R_\mu\varphi_A : A \to 2^A$ を

$$Q_\mu\varphi_A(a) = \{\ a' \in \varphi_A(a)\ \mid\ r_\mu(\mathcal{V}(a')) = r_\mu(\mathcal{V}(a))\ \},\quad a \in A$$
$$R_\mu\varphi_A(a) = \{\ a' \in \varphi_A(a)\ \mid\ q_\mu(\mathcal{V}(a')) = q_\mu(\mathcal{V}(a))\ \},\quad a \in A$$

と定めることで, 新しく 2 つのゲーム $(A, Q_\mu\varphi_A), (A, R_\mu\varphi_A)$ を定義できる. それぞれを (A, φ_A) の **μ-quotient**, **μ-residue** とよぶ.

これらは (A, φ_A) と大きく異なるゲームであるが, それぞれのグランディ関数 $Q_\mu\mathcal{V}_A$, $R_\mu\mathcal{V}_A$ について次の定理が成り立つ.

Theorem 1.2
ゲーム (A, φ_A) の局面 $a \in A$ に対し,

$$\mathcal{V}_A(a) = \mu \cdot Q_\mu\mathcal{V}_A(a) + R_\mu\mathcal{V}_A(a),\quad R_\mu\mathcal{V}_A(a) < \mathcal{V}_A(a)$$

が成り立つ.

この定理によると, $Q_\mu\mathcal{V}_A$, $R_\mu\mathcal{V}_A$ がわかれば $\mathcal{V}_A$ がわかる. しかし, μ-quotient, μ-residue は定義に $\mathcal{V}_A$ を含み, 一般には $\mathcal{V}_A$ を介さずに求めることは簡単ではない. ところが, 次のような場合には $\mathcal{V}_A$ に依らずに考えることができる.

Theorem 1.3
(A, φ_A) をゲーム, (A, φ_1) を

$$\varphi_1(a) \subset \varphi_A(a),\quad a \in A$$

をみたすゲーム, $\mathcal{V}_1$ を (A, φ_1) のグランディ関数とする. また, (A, φ_2) を

$$\varphi_2(a) = \{a' \in \varphi_A(a) \mid \mathcal{V}_1(a') = \mathcal{V}_1(a)\},\quad a \in A$$

で定められるゲーム, $\mathcal{V}_2$ をそのグランディ関数とし, 順序数 μ で次の 2 つの条件 D1, D2 をみたすものが存在すると仮定する.

(D1) 任意の $a \in A$ に対し, $\mathcal{V}_2(a) < \mu$ が成り立つ

(D2) 任意の $a \in A$ と任意の順序数 $\gamma < \mathcal{V}_1(a)$ に対し,

$$\{\ \mathcal{V}_2(a') \mid a' \in \varphi_A(a),\ \mathcal{V}_1(a') = \gamma\ \} = \{\ \alpha \in \mathcal{O} \mid \alpha < \mu\ \}$$

が成り立つ

このとき

$$\mathcal{V}_A(a) = \mu \cdot \mathcal{V}_1(a) + \mathcal{V}_2(a),\quad a \in A$$

が成り立つ. 特に (A, φ_2) は (A, φ) の μ-residue であり,

$$\varphi_3(a) = \{a' \in \varphi_A(a) \mid \mathcal{V}_2(a') = \mathcal{V}_2(a)\},\quad a \in A$$

で定められるゲーム (A, φ_3) が μ-quotient となる.

以下, これらを用いて具体的なゲームのグランディ関数を求める.

2 Sato-Welter game

2.1 nim

ゲーム (N, φ_N) を

$$N = \{\ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq i \leq n\ \}$$
$$\varphi_N(a_1, \ldots, a_n) = \{(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n) \in N \mid a_i' < a_i \text{ for some } i\}, \quad (a_1, \ldots, a_n) \in N$$

で定める. このゲームは**ニム (nim)** とよばれる. ニムのグランディ関数 $\mathcal{V}_N$ はよく知られていて, 次のようにして求められる.

$a, b \in \mathbb{N}_0$ に対し,

$$q_{2^k}(c) \equiv q_{2^k}(a) + q_{2^k}(b) \mod 2, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

が成り立つような $c \in \mathbb{N}_0$ が一意的に定まる. 実際, c は a, b を二進数で表し各桁ごとに繰り上がりを無視して和をとったものになる. この c を $a \oplus b$ で表し, 演算 $\oplus$ を**ニム和 (nim addition)** とよぶ. ニム和 $\oplus$ に関して, $\mathbb{N}_0$ は加群を成す.

Theorem 2.1 (R. P. Sprague, P. M. Grundy)
ニム (N, φ_N) のグランディ関数 $\mathcal{V}_N$ は

$$\mathcal{V}_N(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n, \quad (a_1, \ldots, a_n) \in N$$

で得られる.

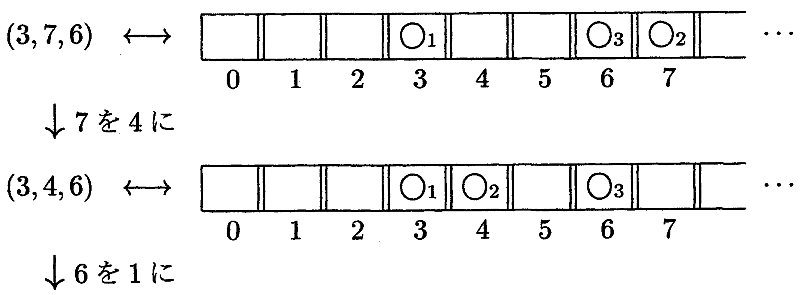
2.2 Sato-Welter game

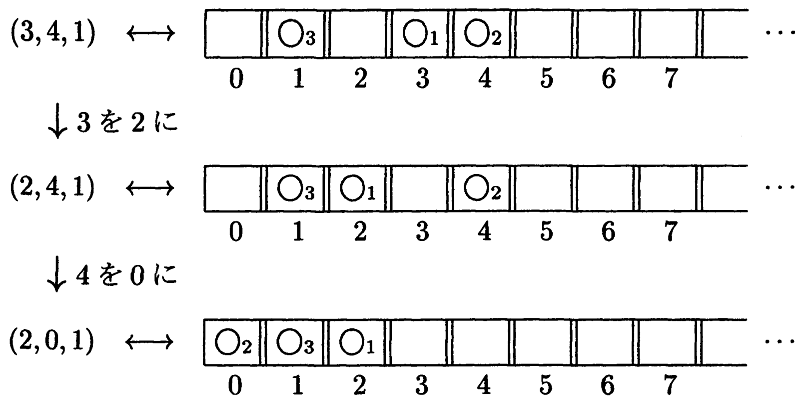
ニム (N, φ_N) に対し, ゲーム (S, φ_S) を

$$S = \{\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N \mid \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j\ \}$$
$$\varphi_S(a) = \varphi_N(a) \cap S, \quad a \in S$$

で定める. このゲームを**佐藤のゲーム (Sato-Welter game)** とよぶ (国際的には Welter's game とよばれるが, 呼称については 川中 [7] に賛同したい).

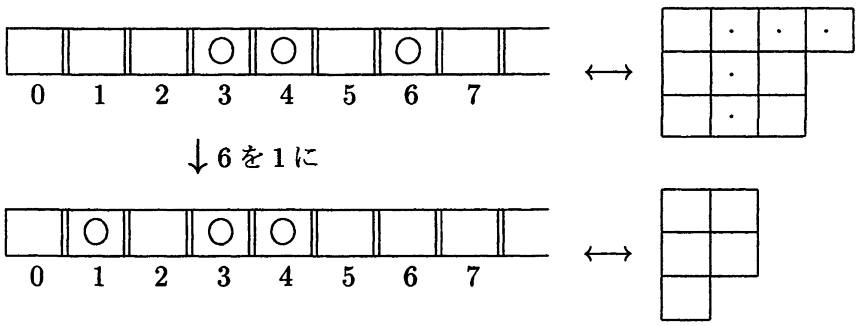
佐藤のゲームは, 右に長く続くマス目に置かれた番号のついた石を, より左のマス目に移動させていくゲームと考えることができる.





ゲーム終了

また, 番号のついていない石の配列はヤング図形に対応させることができ, 石の動きはヤング図形で「セルのフック (そのセルと, そのセルより右側・下側にあるセル) を抜き, 残りを左上に詰める」という操作に対応させることができる.



以上の対応から, 佐藤のゲームはヤング図形でフックを抜いていくゲームとも考えることができる.

佐藤のゲームのグランディ関数 $\mathcal{V}_S$ について次の定理が成り立つ.

Theorem 2.2 (M. Sato (1968), C. P. Welter (1954))
佐藤のゲーム (S, φ_S) のグランディ関数 $\mathcal{V}_S$ は

$$\mathcal{V}_S(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus} (a_i | a_j), \quad (a_1, \ldots, a_n) \in S$$

で得られる. ただし, 和 $\sum^{\oplus}$ はニム和による総和であり,

$$(m|n) = m \oplus n \oplus ((m \oplus n) - 1), \quad m, n \in \mathbb{N}_0$$

とする.

2.3 Sato-Welter game of height 2^k

佐藤のゲームを一般化する.

$k \in \mathbb{N}_0$ を固定し, ゲーム (T, φ_T) を

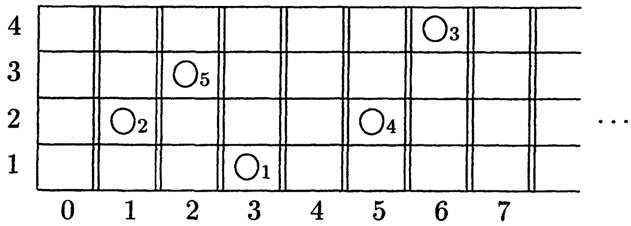
$$T = \{\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S \mid q_{2^k}(a_i) \neq q_{2^k}(a_j),\ i \neq j\ \}$$
$$\varphi_T(a) = \varphi_S(a) \cap T, \quad a \in T$$

で定める. (T, φ_T) を **2^k-佐藤のゲーム (Sato-Welter game of height 2^k)** とよぶ.

2^k-佐藤のゲームは, 高さ 2^k で右に長く続くマス目に置かれた, 番号のついた石を動かすゲームと考えられる. ただし, 石は各縦列に高々1つで, より左の縦列にあるマス目, あるいは同じ縦列でより下のマス目に動かすとする.

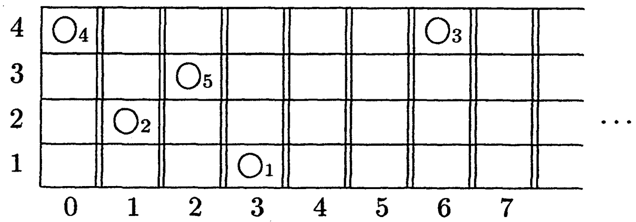
2^2-佐藤のゲーム

$(12, 5, 27, 21, 10) \longleftrightarrow$



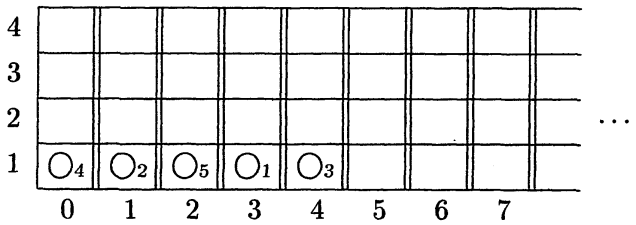
$\downarrow$ 21 を 3 に

$(12, 5, 27, 3, 10) \longleftrightarrow$



$\downarrow$
$\vdots$
$\downarrow$

$(12, 4, 16, 0, 8) \longleftrightarrow$



ゲーム終了

2^k-佐藤のゲーム (T, φ_T) のグランディ関数 $\mathcal{V}_T$ について, 次の定理が成り立つ.

Theorem 2.3
2^k-佐藤のゲーム (T, φ_T) の局面 $(a_1, \ldots, a_n) \in T$ に対し,

$$\mathcal{V}_T(a_1, \ldots, a_n) = 2^k \cdot \mathcal{V}_S\left(q_{2^k}(a_1), \ldots, q_{2^k}(a_n)\right) + \mathcal{V}_N(r_{2^k}(a_1), \ldots, r_{2^k}(a_n))$$

が成り立つ. さらに, グランディ関数 $\mathcal{V}_T$ は

$$\mathcal{V}_T(a) = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus}\left(q_{2^k}(a_i) \,\middle|\, q_{2^k}(a_j)\right), \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

で得られる.

proof Theorem 1.3 に従って示す.
写像 $\varphi_1 : T \to 2^T$ を

$$\varphi_1(a) = \{\ (a'_1, \ldots, a'_n) \in \varphi_T(a) \mid r_{2^k}(a_i) = r_{2^k}(a'_i),\ 1 \le i \le n\ \},\ \ a = (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

によって定める. 写像 $f : T \to S$ を

$$f(a_1, \ldots, a_n) = (q_{2^k}(a_1), \ldots, q_{2^k}(a_n)),\quad (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

で定めるとゲーム (T, φ_1) と佐藤のゲーム (S, φ_S) は準同型, $(T, \varphi_1) \xrightarrow{f} (S, \varphi_S)$, となり,

$$\mathcal{V}_1(a) = \mathcal{V}_S\,(f(a)),\quad a \in T$$

がわかる. これにより, 写像 $\varphi_2 : T \to 2^T$ は

$$\varphi_2(a) = \{\ (a'_1, \ldots, a'_n) \in \varphi_T(a) \mid q_{2^k}(a_i) = q_{2^k}(a'_i),\ 1 \le i \le n\ \},\ \ a = (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

で定まる. 写像 $g : T \to N$ を

$$g : (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto (r_{2^k}(a_1), \ldots, r_{2^k}(a_1)),\quad (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

で定めると, ゲーム (T, φ_1) とニム (N, φ_N) は準同型, $(T, \varphi_1) \xrightarrow{g} (N, \varphi_N)$, となる.
このとき, $\mu = 2^k$ として Theorem 1.3 が成り立つ. (T, φ_2) が 2^k-residue であり, $\varphi_3 = \varphi_1$ が成り立つことから (T, φ_1) が 2^k-quotient である. よって

$$(T, Q_{2^k}\varphi_T) \xrightarrow{f} (S, \varphi_S),\quad (T, R_{2^k}\varphi_T) \xrightarrow{g} (N, \varphi_N)$$

がわかり,

$$\mathcal{V}_T(a) = 2^k \cdot \mathcal{V}_S\,(f(a)) + \mathcal{V}_N(g(a)),\quad a \in T$$

を得る.
後半は

$$\alpha = 2^k \cdot q_{2^k}(\alpha) \oplus r_{2^k}(\alpha),\quad \alpha \in \mathbb{N}_0$$

を用いて式を変形.

3 Transfinite Sato-Welter game

次に, 佐藤のゲームにおいて, 非負整数の組を順序数の組へと一般化する.

3.1 transfinite nim

ゲーム $(\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}})$ を

$$\mathcal{N} = \{\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathcal{O},\ 1 \le i \le n\ \},$$
$$\varphi_{\mathcal{N}}(a) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N} \mid \alpha'_i < \alpha_i \text{ for some } i\},\quad a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}$$

で定める. このゲームを**超限ニム (transfinite nim)** とよぶ. 超限ニムのグランディ関数 $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ について次の関係式が成り立つ.

Theorem 3.1
$\tau \in \mathcal{O}$ とする. 超限ニム $(\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}})$ の局面 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}$ に対し,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 2^\tau \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(q_{2^\tau}(\alpha_1), \ldots, q_{2^\tau}(\alpha_n)) + \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(r_{2^\tau}(\alpha_1), \ldots, r_{2^\tau}(\alpha_n))$$

が成り立つ. 特に

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 2 \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(q_2(\alpha_1), \ldots, q_2(\alpha_n)) + \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(r_2(\alpha_1), \ldots, r_2(\alpha_n)),$$
$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \omega \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(q_\omega(\alpha_1), \ldots, q_\omega(\alpha_n)) + \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(r_\omega(\alpha_1), \ldots, r_\omega(\alpha_n))$$

である. ただし, ω を最小の超限順序数, つまり

$$\omega = \min\{\mathcal{O} \setminus \mathbb{N}_0\}$$

とする.

proof Theorem 2.3 と同様に Theorem 1.3 に従って示す.
$\mu = 2^\tau$ とする. 写像 $\varphi_1 : T \to 2^T$ を

$$\varphi_1(a) = \{\ (a'_1, \ldots, a'_n) \in \varphi_T(a) \mid r_\mu(a_i) = r_\mu(a'_i),\ 1 \le i \le n\ \},\ \ a = (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

とすると, 写像

$$f : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \longmapsto (q_\mu(\alpha_1), \ldots, q_\mu(\alpha_n))$$

によって, 準同型

$$(\mathcal{N}, \varphi_1) \xrightarrow{f} (\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}})$$

が成り立つ. ここから, 写像 $\varphi_2 : T \to 2^T$ は

$$\varphi_2(a) = \{\ (a'_1, \ldots, a'_n) \in \varphi_T(a) \mid q_\mu(a_i) = q_\mu(a'_i),\ 1 \le i \le n\ \},\ \ a = (a_1, \ldots, a_n) \in T$$

で定まり, 写像

$$g : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \longmapsto (r_\mu(\alpha_1), \ldots, r_\mu(\alpha_1))$$

によって, 準同型

$$(\mathcal{N}, \varphi_2) \xrightarrow{g} (\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}})$$

が成り立つ.
このとき, Theorem 1.3 が成り立つ. $\varphi_3 = \varphi_1$ と合わせて, $(\mathcal{N}, \varphi_2)$ が μ-quotient, $(\mathcal{N}, \varphi_1)$ が μ-residue である. よって

$$(\mathcal{N}, Q_\mu\varphi_{\mathcal{N}}) \xrightarrow{f} (\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}}), \quad (\mathcal{N}, R_\mu\varphi_{\mathcal{N}}) \xrightarrow{g} (\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}})$$

がわかり,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(a) = 2^\tau \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{N}}\,(f(a)) + \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(g(a)), \quad a \in T$$

を得る.

この定理から, $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ の値を帰納的に求めることができる. また, $a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{N}_0$ の場合から Theorem 2.1 が示される.

3.2 nim addition

ニム和を順序数の演算として一般化する.

$\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathcal{O}$ に対し, ニム和 $\oplus$ を

$$\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n = \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

で定義する.

3.3 transfinite Sato-Welter game

超限ニム $(\mathcal{N},\varphi_{\mathcal{N}})$ に対し, ゲーム $(\mathcal{S},\varphi_{\mathcal{S}})$ を

$$\mathcal{S} = \{\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathcal{N} \mid \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j\ \},$$
$$\varphi_{\mathcal{S}}(a) = \varphi_{\mathcal{N}}(a) \cap \mathcal{S}, \quad a \in \mathcal{S}$$

で定める. このゲームを**超限佐藤のゲーム (transfinite Sato-Welter game)** とよぶ.

超限佐藤のゲームのグランディ関数 $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ について次の定理が成り立つ.

Theorem 3.2

超限佐藤のゲーム $(\mathcal{S},\varphi_{\mathcal{S}})$ のグランディ関数 $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ は

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} (\alpha_i|\alpha_j)$$

で得られる. ここで, 任意の $\alpha,\beta \in \mathcal{O}$ に対し,

$$(\alpha|\beta) = \begin{cases} r_\omega(\alpha) \oplus r_\omega(\beta) \oplus ((r_\omega(\alpha) \oplus r_\omega(\beta)) - 1) & \text{if } q_\omega(\alpha) = q_\omega(\beta) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする.

proof ω-quotient が超限ニムに準同型, ω-residue が有限佐藤のゲームの組に準同型, が示される. 論文近刊予定.

最後に出典について少し.

佐藤のゲームの一般化である 2^k-佐藤のゲーム, 超限佐藤のゲームはともに川中宣明先生に紹介していただきました.

超限佐藤のゲームの出典は Nowakowski[5] で, 佐藤のゲームの一般化の例としてほんの少しだけ触れられています. また, 2^k-佐藤のゲームはもともと川中先生のオリジナルであり, 少し前の代数的組合せ論シンポジウムにおいて, Theorem 2.3 と同等の結果を本稿とは別の証明で発表されています.

ニムや佐藤のゲーム, 超限ニムに関しては Conway[4] が参照しやすく, 佐藤-Welter の定理 (Theorem 2.2) の Conway による証明も載っています. また, 佐藤-Welter の定理は佐藤 [3] と Welter[2] で証明されましたが, 川中 [7] では別のアプローチ (ゲームの一般化) によって証明されています.

佐藤のゲームで 2-quotient や 2-residue を考えることでヤング図形の core と呼ばれるものが現れるため, 表現論的に意味があると考えられます. それらについても川中 [7] に詳しくあります.

References

[1] 彌永 昌吉, 小平 邦彦, 現代数学概説 I, 岩波書店, 1961

[2] C. P. Welter, *The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of advancing operation in a special group*, Indag. Math. **16**, 194-200, 1954.

[3] 佐藤幹夫述 (榎本彦衛記), Maya game について, 数学のあゆみ, 15-1 (佐藤幹夫特集号), 73-84, 1970.

[4] J. H. Conway : *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976.

[5] R. J. Nowakowski, ..., *Welter's game, Sylver coinage, dots-and-boxes,...*, Combinatorial Games, Proc. Symp. Appl. Math. **43** (R. K. Guy, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI. 155-182, 1991.

[6] 川中宣明, ゲーム・アルゴリズム・表現論, 日本数学会 2008 年度年会企画特別講演アブストラクト. http://mathsoc.jp/meeting/kikaku/2008haru/2008_haru_kawanaka.pdf

[7] 川中宣明, フック構造をもつゲーム, 2010 年度代数学シンポジウム報告集. http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/100809/pdf/kawanaka.pdf